2BAC-B.I.O.F	Complexes + Fonctions ln + Suites	GS ENNOUR
2019-2010	Devoir surveillé **3**	Prof: Karimine

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points d'affixes respectives : $a = -1 - i$, $b = -1 + i\sqrt{3}$ et $c = \sqrt{3} - i$

❶ a Vérifier que $\dfrac{b-a}{c-a} = i$

b En déduire que le triangle ABC est isocèle rectangle en A.

❷ a Donner l'écriture algébrique du nombre complexe $\dfrac{a}{b}$

b Déterminer une écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes a , b et $\dfrac{a}{b}$

c En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$

❸ a Vérifier que $b = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) c$

b Montrer que $OB = OC$ puis déterminer la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}})$

❹ Déterminer les ensembles des point M d'affixe z dans les cas suivants:

a $\left|z + i - \sqrt{3}\right| = \left|z + 1 - i\sqrt{3}\right|$ b $|z + 1 + i| = \left|1 - i\sqrt{3}\right|$

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x + 1 - 2\ln(x)$

❶ a Etudier les variation de g

b Vérifier que $g(2) = \ln\left(\dfrac{e^3}{4}\right)$ puis déterminer le signe de $g(x)$

❷ Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln x - (\ln x)^2$

a Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ puis interpreter le résultat géométriquement

b Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpreter le résultat géométriquement

c Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

d Dresser le tableau de variations de f

❸ a Etudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et (Δ)

b Construire $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}, \vec{j})$

❹ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a Montrer que, $(\forall n \in \mathbb{N})$: $1 \leqslant U_n \leqslant e$

b Montrer que (u_n) est croissante

c En déduire (u_n) converge puis déterminer $\lim u_n$