2BAC-B.I.O.F	NOMBRES COMPLEXES	GS Ennour
2019-2020	SEMESTRE 1	Prof: KARIMINE

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

❶ Placer les points $A\,(3i)$, $B\,(1+i)$, $C\,(4)$, $D\left(\dfrac{-5}{2}\right)$, $E(-2i)$ et $F(-2+2i)$

❷ Déterminer $\arg(z_A)$, $\arg(z_B)$, $\arg(z_C)$, $\arg(z_D)$, $\arg(z_E)$ et $\arg(z_F)$

❸ Donner le module et un argument du nombre complexe $z = z_A^3 \times \dfrac{z_B^5}{z_F^2}$

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. On désigne par A le point d'affixe i et par M le point d'affixe z, distincte de i et M' le point d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{z-\mathrm{i}}{\overline{z}+\mathrm{i}}$.

❶ Démontrer que $\mathrm{O}M' = 1$ et interpréter géométriquement ce résultat.

❷ Démontrer que $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right) = 2\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right)\,[2\pi]$

Exercice 3

On considère dans le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ les points A, B, C *et* D d'affixes respectives $a = -4i$; $b = 2-i$; $c = -1+i$ et $d = 4+2i$

❶ Montrer que les points A, B *et* D sont alignés

❷ Déterminer une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}}\right)$

❸ Montrer que le quadrilatère $ACDE$ est un parallélogramme

❹ Montrer que ABC isocèle rectangle en B

Exercice 4

On considère dans le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ les points A, B, C *et* D d'affixes respectives $a = 3+4i$; $b = 5+6i$; $c = 2+3i$ et $d = 3+8i$

❶ Montrer que les points A, B *et* C sont alignés

❷ Vérifier que $\left(\overline{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ et $DA = \sqrt{2}DB$

Exercice 5

Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

❶ $z_1 = 2+2\sqrt{3}i$

❷ $z_2 = -\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

❸ $z_3 = -\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$

❹ $z_4 = \dfrac{8}{1-i}$

❺ $z_5 = (1-i)^2$

❻ $z_6 = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{1+i}$

❼ $z_7 = \dfrac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}$

❽ $z_8 = \left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2017}$

a $\cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right) - i\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$

b $-\cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$

c $\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right) - i\cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$

Exercice 6

On donne les nombres complexes suivants : $\boldsymbol{a = \sqrt{3} - i}$ et $\boldsymbol{b = 1 - i}$

❶ Donner la forme algébrique et trigonométrique de $\dfrac{a}{b}$

❷ En déduire que : $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Exercice 7

On donne les nombres complexes suivants : $a = \dfrac{3}{\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}}i$, $b = \dfrac{1}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{6}i$ et $c = ab$

❶ Donner la forme trigonométrique de a et b

❷ Calculer $|c|$ et $\arg(c)$ puis donner la forme trigonométrique de c

❸ Ecrire c sous forme algébrique puis donner la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$

Exercice 8

On considère le nombre complexe $z = (\sqrt{6}+\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

❶ Ecrire z^2 sous forme algébrique

❷ Calculer $|z^2|$ et $\arg(z^2)$ puis donner la forme trigonométrique de z

❸ Déterminer l'ensemble des des entiers naturels n pour lesquels z^n soit imaginaire pur.

Exercice 9

On considère dans le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ les points A, B, C *et* D d'affixes respectives $a = 1-\sqrt{3}i$; $b = \sqrt{3}-i$; $c = \sqrt{3}+i$ et $d = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

❶ Donner la forme trigonométrique de a , b , c et d

❷ Montrer que les points A , B et C appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 2.

❸ Vérifier que $\dfrac{b-a}{c-a} = i$ puis déduire la nature du triangle ABC

❹ Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-1+\sqrt{3}i| = |z-\sqrt{3}-i|$

❺ a Vérifier que $\left|\dfrac{d}{c}\right| = 1$; $\arg\left(\dfrac{d}{c}\right) \equiv \dfrac{7\pi}{12}[2\pi]$ et $\dfrac{d}{c} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i$

b Montrer que $\left(\dfrac{d}{c}\right)^{12} = -1$

Exercice 10

Soit $\theta \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$. On pose $Z_\theta = 1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)$

❶ Vérifier que $|Z_\theta| = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(Z_\theta) = \dfrac{\theta}{2}[2\pi]$

❷ En déduire la forme trigonométrique de $a = 1 + \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ puis vérifier que $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$