2BAC-B.I.O.F	NOMBRES COMPLEXES	GS Ennour
2019-2020	SEMESTRE 2	Prof: KARIMINE

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

❶ a $z^2+4z+5=0$. b $2z^2+5z+17=0$. c $z^2+2\sqrt{3}z+12=0$.

❷ $2z^3+(1-6i)z^2+(5-3i)z-15i=0$ sachant que l'elle admet une racine imaginaire pure.

❸ Compléter le tableau suivant

La forme algébrique	La forme trigonométrique	La forme exponentielle
....	$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$	....
....	....	$4e^{-i\frac{\pi}{6}}$
i	....	....

❹ Soit $a=4e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $b=2e^{i\frac{\pi}{6}}$. Effectuer les calculs suivant et mettre les résultats sous forme exponentielle.

a ab b $\dfrac{1}{a}$ c a^3 d $\dfrac{a}{b}$

❺ Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

a $a=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{1+i}$ b $b=\dfrac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}$ c $c=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2017}$

Exercice 2

Soient $a=-2+2i$ et $b=4\sqrt{3}-4i$ et $c=ab$

❶ Calculer le module et un argument des nombres a et b

❷ Donner l'écriture exponentielle des nombres a , b et c

❸ Ecrire c sous forme algébrique puis donner la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

Exercice 3

Soint $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et $\theta\in\mathbb{R}$

❶ a Montrer que $1+e^{i\theta}=2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

b Vérifier que $a=2\left(1+e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$

c En déduire la forme exponentielle de a

d Linéariser $\cos^2(x)$ et $\sin^3(x)$

❷ a pour tout $\theta\in]0;2\pi[$, soit $z=e^{i\theta}$. Quel ensemble décrit le point M d'affixe z ?

b Montrer à l'aide des formules d'Euler que $\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{2i\sin(\frac{\theta}{2})}$.

c En déduire : $\dfrac{1}{z-1}=-\dfrac{i\cos(\frac{\theta}{2})}{2\sin(\frac{\theta}{2})}+\dfrac{1}{2}$.

Exercice 4

On considère la translation T de vecteur $\overrightarrow{u}(2+3i)$

❶ a Donner l'écriture complexe de la translation T

b Déterminer l'affixe du point B image de $A(1+4i)$ par la translation T

❷ On considère les points E et F d'affixes respectives $z_E = 1-2i$; $z_F = -4+i$

Donner l'écriture complexe de la translation transformant E en F

Exercice 5

Soit h homothétie de centre $\Omega(2-i)$ et rapport 4

❶ a Donner l'écriture complexe de la translation h

b Déterminer l'affixe du point F image de $E(1+i)$ par l'homotétie h

❷ On considère les points A , B *et* C d'affixes respectives $a = 1+3i$; $b = -1+4i$ et $c = 5+i$

a Calculer $\dfrac{c-a}{b-a}$ puis en déduire que les points A , B *et* C sont alignés

b Donner l'écriture complexe de l'homotétie de centre A transformant B en C

Exercice 6

Soit R la rotation de centre $\Omega(1-4i)$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

❶ a Donner l'écriture complexe de la translation R

b Vérifier que l'affixe du point F image de $E(1+i)$ par la rotation R est $z_F = 6-4i$

❷ On considère les points A , B *et* C d'affixes respectives $a = -3+i$; $b = 1+2i$ et $c = 6i$

a Ecrire $\dfrac{a-b}{c-b}$ sous la forme exponentielle puis en déduire la nature de ABC

b Donner l'écriture complexe de la rotation de centre B transformant C en A

❸ Décrire des transformation suivantes:

a $z' = 3z+2i$ b $z' = z-3+2i$ c $z' = \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

Exercice 7

Soit l'application R du plan qui transforme $M(z')$ en $M(z)$ tel que :

$$z' = -iz - 2(1+\sqrt{3}) + 2(\sqrt{3}-1)i$$

et soint A , B , et D les points tels que $z_A = 2\sqrt{3}+2i$, $z_B = -2+2\sqrt{3}i$ et $z_D = 2\sqrt{3}-6i$

❶ Montrer que l'affixe du point C l'image du point A par l'application R est $z_C = -2\sqrt{3}-2i$

❷ Vérifier que $z' - z_B = -i(z - z_B)$ puis en déduire la nature de R

❸ Montrer que $\dfrac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ puis donner la nature du triangle ACD