2ECT	Concours Blanc	Lycée Razi
2019-2020	N^0 1	Prof: KARIMINE

Problème 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^{-x}$ et on note (C) la courbe représentative de j dans un repère orthonormal.

❶ Déterminer les limites de f quand x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

❷ Etudier les variations de f

❸ Etudier la convexité de f

❹ Montrer que $(\forall x \geq 0)$; $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{e}$

a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α, dans $[0; +\infty[$.

b) Vérifier que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

❺ On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

a) Ecrire une fonction Scilab qui calcule et affiche le n^e terme de la suite (u_n)

b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$

c) Montrer, en utilisant le résultat de la question 4, que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_{n+1} - a| \leqslant \dfrac{1}{e}|u_n - \alpha|$

d) En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel à préciser.

e) Ecrire un programme Scilab qui calcule et affiche une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

❻ Pour tout entier naturel n . On pose: $I_n = \displaystyle\int_0^1 (x+1)^n e^{-x} dx$ et $J_n = \displaystyle\int_{-1}^0 (x+1)^n e^{-x} dx$

a) Calculer I_0, J_0 et I_1

b) Etudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq \dfrac{1}{e}\displaystyle\int_0^1 (x+1)^n dx$

d) Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

e) Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge.

f) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+1} = -1 + (n+1)J_n$

g) En déduire par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, J_n = n!\left(e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$

h) Ecrire un programme Scilab qui calcule et affiche la valeur de J_n pour un entier n entré par l'utilisateur (on rappelle que la commande factorial(n) donne $n!$)

i) Justifier que $e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

j) Montrer que $\forall k \geq 1, \dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{(k-1)(k-1)!} - \dfrac{1}{kk!}$ puis en déduire que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{nn!}$

k) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. Quelle est la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Problème 2

On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ et on pose $Y = \sqrt{X}$.
On rappelle qu'en Scilab la commande grand(1,1, 'exp', 1/lambda) simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

❶ Ecrire une (ou des) commande(s) Scilab utilisant grand et permettant de simuler Y.

❷ a) Donner l'expression de la fonction de répartition de X.

b) Que vaut $P(Y \leq y)$ pour $y < 0$?

c) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

d) En déduire que Y est une variable à densité et en donner une densité f_Y.

❸ a) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite.

b) En déduire que Y possède une espérance et donner sa valeur.

c) On pose $U = 1 - e^{-X/2}$.Vérifier que $U(\Omega) = [0, 1[$

d) Déterminer la fonction de répartition F_U de U et reconnaître la loi de U.

e) Exprimer X en fonction de U, puis en déduire une simulation Scilab de Y utilisant uniquement la fonction rand

Problème 3

On considère les matrices M et P suivantes: $M = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

❶ a) Prouver que la matrice P est inversible et donner les neuf coefficients de P^{-1}.

b) Calculer la matrice T définie par $T = P^{-1}MP$.

c) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n :$T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) En déduire l'expression de la matrice M^n sous la forme d'un tableau de nombres.

❷ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \; u_1 = -1, \; u_2 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \; : \; u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$$

❸ a) Calculer u_3 et u_4

b) Pour tout entier naturel n, on considère la matrice colonne: $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

Vérifier que pour tout entier naturel n :$V_{n+1} = MV_n$

c) Établir, par récurrence, que pour tout entier naturel n :$V_n = M^nV_0$

d) Exprimer u_n en fonction de n

Problème 4

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.
On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.
Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note :

B_k l'événement : "on obtient une boule bleue au k-ième tirage"

R_k l'événement : "on obtient une boule rouge au k-ième tirage"

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

❶ a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p([Y = n]) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance? une variance?

❷ Déterminer de même la loi de Z. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance? une variance?

On définit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si on obtient une boule rouge au k-ième tirage et égale à 0 sinon.

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges au cours des n premiers tirages.

❸ Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

❹ Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

❺ a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).

b) En déduire la loi de X_2.

c) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes?

❻ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0; n]\!]$.

a) Calculer $p(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$.

b) Justifier : $p([S_n = k]) = \dbinom{n}{k} p(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$,

puis en déduire : $p([S_n = k]) = \dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$

❼ Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et : $E(S_n) = \dfrac{2n}{3}$.

❽ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer : $\forall k \in [\![0; n]\!], \quad p_{[S_n=k]}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{k+2}{n+3}$.

b) En déduire : $p([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{E(S_n) + 2}{n+3}$.

c) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on?