Dénombrement

Activité

Soit E l'ensemble tel que : $E = \{1; 2; 3; 4\}$

❶ le nombre d'éléments de E est appelé cardinal de E et noté $card(E)$.Que vaut $card(E)$?

❷ Soit Ω l'ensemble des nombres de deux chiffres distincts formés à l'aide des éléments de E. Déterminer $card(\Omega)$?

❸ Soit Ω_1 l'ensemble des nombres de deux chiffres, distincts ou non, choisis parmi les éléments de E. Déterminer $card(\Omega_1)$?

❹ Soit Ω_2 l'ensemble des nombres de trois chiffres choisis parmi les éléments de $F = \{2; 3; 4\}$. Déterminer $card(\Omega_2)$?

❺ Soit Ω_3 l'ensemble des parties de deux chiffres choisis parmi les éléments de E. Déterminer $card(\Omega_3)$?

Définitions

❶ a. On appelle arrangement (sans répétition) de p éléments parmi n toute disposition ordonnée sans répétition de p éléments.

b. Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est égal à : $\boxed{A_n^p}$

❷ a. On appelle arrangement avec répétition de p éléments parmi n, toute suite ordonnée avec répétition de p éléments parmi n .

b. Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments parmi n est égal à $\boxed{n^p}$

❸ a. Le cas particulier où $n = p$, un arrangement est alors appelé permutation

b. Le nombre de permutations de n objets est égal à $\boxed{n!}$

❹ a. Soit n un entier naturel. Soit E un ensemble contenant n éléments. Toute partie de E formée de p eléments de E (avec $0 \leq p \leq n$) est appelée combinaison de p éléments de E .

b. Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est noté $\boxed{C_n^p}$

On a :

Notation	A_n^p	$n!$	C_n^p
Définition	$A_n^p = n\times(n-1)\times.....\times(n-p+1)$	$n! = n\times(n-1)\times.....\times 1 = A_n^n$	$C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

Exercice 1

Calculer

a. $4!$ b. A_6^3 c. C_7^3

Principe fondamental de dénombrement

PRINCIPE

Soit $\boldsymbol{E}$ une expérience dont les résultats nécessitent $\boldsymbol{k}$ choix.Si

- le premier choix se fait de $\boldsymbol{n_1}$ façons differentes
- le deuxième choix se fait de $\boldsymbol{n_2}$ façons differentes
- ....
- le $\boldsymbol{k^{ième}}$ choix se fait de $\boldsymbol{n_k}$ façons differentes

alors le nombre de résultats possibles est donné par le produit: $\boxed{\boldsymbol{n_1 \times n_2 \times \ldots\ldots\ldots \times n_k}}$

Exercice 2

Une urne contient 7 boules numérotées de 1 à 7.

❶ On tire successivement avec remise 3 boules de cette urne. Quel est alors le nombre de tirages possibles ?

❷ On tire successivement sans remise 3 boules de cette urne. Quel est alors le nombre de tirages possibles ?

❸ On tire simultanément 3 boules de cette urne. Quel est alors le nombre de tirages possibles ?

Tirages	Successifs (l'ordre compte)	Simultanés (l'ordre ne compte pas)
Avec remise	n^p	
Sans remise	A_n^p Arrangements	C_n^p Combinaisons

Propriétés

Soint $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{p}$ deux entiers tels que $\mathbf{1 \leq p \leq n}$

a $\boxed{C_n^p = C_n^{n-p}}$

b $\boxed{A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}}$

c $\boxed{C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}}$

Exercice 3

Un sac contient 3 boules blanches, deux boules noires et une boule rouge.

❶ On tire successivement et avec remise 3 boules du sac.

a Quel est le nombre de résultats possibles?

b Quel est le nombre de résultats contenant 3 boules de même couleur?

c Quel est le nombre de résultats contenant une boule de chaque couleur?

d Quel est le nombre de résultats contenant exactement deux boules rouges ?

❷ On tire maintenant successivement et sans remise 3 boules du sac. Repondre aux questions précédentes.

❸ On tire maintenant simultanément 3 boules du sac. Répondre aux questions précédentes.