Exercice 1

On effectue n tirages avec remise dans une urne contenant deux boules bleues et quatre boules rouges. A chaque tirage i (variant de 1 à n), on associe la variable aléatoire X_i qui vaut 1 si la boule tirée est bleue, et 0 sinon. On définit $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

❶ Quelle est la loi de X_i?

❷ En utilisant Bienaymé-Tchebychev, déterminer le nombre n_0 de tirages nécessaires pour que

$$P\left(\left|X_{n_0} - \frac{1}{3}\right| \geq 0,1\right) \leq 0,01$$

Exercice 2

Soient θ est un paramètre strictement positif et (X_1, X_2) un échantillon de deux v.a.i.i.d. admettant pour densité:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3} & \text{si } \quad 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

❶ Vérifier que $f_X(x)$ est bien une densité de probabilité. Calculer $E[X]$, et $V(X)$

❷ Soit $T_1 = \frac{2}{3}(X_1 + X_2)$. Montrer que T_1 est un estimateur sans biais de θ. . Calculer son risque quadratique de $r(T_1)$

❸ Soit $T_2 = \frac{7}{6}\max(X_1, X_2)$

a Donner l'ensemble des valeurs $T_2(\Omega)$

b Calculer la fonction de répartition de T_2, en déduire sa densité de probabilité.

c Calculer l'espérance et la variance de T_2. Montrer que T_2 est un estimateur sans biais de θ

❹ Entre T_1 et T_2, quel estimateur choisiriez-vous ? (justifier votre choix)

Exercice 3

Un évènement peut se produire à tout instant X (loi uniforme) dans un intervalle $I = [0, b]$, où b est inconnu. Pour estimer la valeur de b inconnue, on va considérer un n -échantillon $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

❶ Soit l'estimateur $T_1 = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Calculer $E(T_1)$. T_1 est-il sans biais ?Calculer $r(T_1)$

❷ A l'aide de T_1, construire un estimateur sans biais T_2 de b . Calculer $r(T_2)$

❸ Un autre estimateur de b est $T_3 = \sup(X_1, X_2, \cdots, X_n)$. Pour $x \in [0, b]$, calculer $\mathbb{P}(T_3 \leq x)$. En déduire la fonction de répartition, et la densité de T_3

❹ Calculer $E(T_3)$. T_3 est-il un estimateur sans biais ? A l'aide de T_3, construire un estimateur sans biais T_4 de b

❺ On montre que $\text{Var}(T_4) = \dfrac{b^2}{n(n+2)}$. Parmi les 4 estimateurs T_1, T_2, T_3, T_4, lequel est le meilleur ? Justifier votre réponse.