Barème

Exercice 1 : (4,5 points)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{2u_n+3} \end{cases}$; $(\forall n\in\mathbb{N})$

0,5 ① - a - Calculer u_1 et u_2.

0,75 b - Vérifier que : $u_{n+1}-1=\dfrac{u_n-1}{2u_n+3}$, puis Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n \succ 1$.

0,5 c - Montrer que :$(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_{n+1}-u_n = 2\left(\dfrac{1-u_n^2}{2u_n+3}\right)$.

0,5 d - Déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et convergente.

② - On pose : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1}$.

0,25 a - Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $v_n \neq 1$.

0,25 b - Calculer v_0.

0,5 c - Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométirque de raison $\dfrac{1}{5}$.

0,25 d - calculer v_n en fonction de n.

0,25 ③ - a - Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

0,5 b - Déduire que : $u_n = \dfrac{1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n}$.

0,25 c - Calculer $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n$.

Exercice 2 : (4 points)

Un sac contient trois boules blanches numérotées 0,1,2, et deux boules noires numérotées 1,2, toutes indiscernables au toucher.

On tires au hasard successivement et sans remise deux boules du sac.

① - On considère les événements suivants :

A « Les deux boules tirés portant le numéro 1 »

B « La première boule tirée est blanche » .

0,5 a - Montrer que : $p(A)=\dfrac{1}{10}$.

1 b - Calculer la probabilité de B et montrer que : $p(A\cap B)=\dfrac{1}{20}$

0,5 c - Les événements A et B sont-il indépendants ? justifier la réponse.

② - *Soit X la variable aléatoire qui correspond au produit des deux nombres portés par lres deux boules tirées.*

a – Copier le tableau ci-dessous et le compléter en justifant les réponses :

1,5

x_i	0	1	2	4
$p(X=x_i)$	$\frac{8}{20}$			

0,5 *b – Calculer l'espérance mathématique :* $E(X)$.

Exercice 3 : (1,5 points)

On Pose $I=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$ *et* $J=\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx$.

0,5 ① - *Calculer I.*

0,5 ② - *Calculer I+J.*

0,5 ③ - *En déduire que :* $J=\frac{1}{2}(1-\ln 2)$.

Problème : (10 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ *par :* $f(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)e^x$.

Et $(\mathscr{C}_f)$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1,75 ① - *a – Calculer :* $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)$ *et montrer que* $\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$ *puis interpréter le résultat obtenu.*

0,75 *b – Calculer :* $\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)$ *et interpréter le résultat obtenu.*

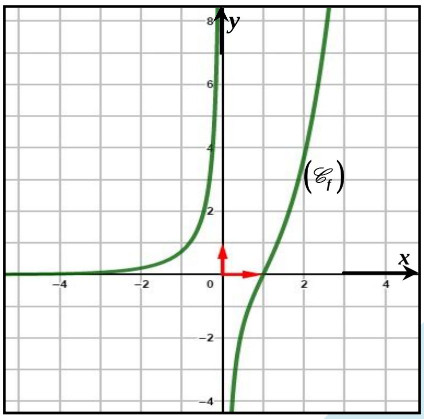
1,75 *c – Montrer qie :* $\lim_{\substack{x\mapsto0\\x\prec0}} f(x)=+\infty$ *et* $\lim_{\substack{x\mapsto0\\x\succ0}} f(x)=-\infty$ *puis interpréter les résultats obtenu.*

1 ② - *a – Montrer que :* $f'(x)=\frac{(x^2-x+1)}{x^2}e^x$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}^*$.

1 *b – Montrer que :* $f'(x)\succ0$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}^*$.

0,5 *c – En déduire le sens de variations de f sur les intervalles* $]-\infty,0[$ *et* $]0,+\infty[$.

1,25 *d – Calculer* $f(1)$ *et dresser le tableau de variations de f.*



③ - *Dans la figure ci-contre* $(\mathscr{C}_f)$ *est la courbe représentative de f .*

1 *a – Donner l'équation de la tangente* (T) *à la courbe* $(\mathscr{C}_f)$ *au point d'abscisse 1.*

0,5 *b – Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation* $f(x)=2$.

0,5 *c – Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation* $f(x)=-2$.