Barème

## Exercice 1 : (4,5 points)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 5 \end{cases}$ ; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

0,5 ① - Calculer $u_1$ et $u_2$.

0,5 ② - a -Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ : $u_n \prec 15$.

0,5 b - Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{3}u_n + 5$.

0,25 c - Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ : $-\dfrac{1}{3}u_n + 5 \succ 0$.

0,5 d - Déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et qu'elle est convergente.

③ - On pose : $(\forall n\in\mathbb{N})$ : $v_n = u_n - 15$.

0,5 a - Montrer que : $v_{n+1} = \dfrac{2}{3}v_n$ .

0,75 b - Calculer le premier terme $v_0$ et montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$ : $v_n = (-12)\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

0,5 ④ - a - Calculer $u_n$ en fonction de $n$.

0,5 b - Calculer : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n$ .

## Exercice 2 : (4 points)

( Tous les résultats seront donnés sous forme de fraction )

Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges, 3 boules blanches et 2 boules vertes.

On tire simultanément au hasard trois boules du sac.

On considère les événements suivants :

A « les trois boules tirées sont blanches » .

B « les trois boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux » .

C « Il y'a aucune boules blanche parmi les trois boules tirées » .

0,5 ① - a - Montrer que : $p(A) = \dfrac{1}{56}$.

1,5 b - Calculer $p(B)$ et $p(C)$.

② - Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de boules blanches tirées.

a - Copier et remplir le tabeau ci-dessous en justifiant le réponses :

1,5

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | | | | |

0,5 b - Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique la variable aléatoire X .

## Problème : (11,5 points)

**1$^{ère}$ partie :**

On considère la fonction $f$ définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x-\dfrac{1}{x}+\ln x$.

Et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 ① - Calculer : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x\succ 0}} f(x)$ et donner une interprétation géométrique du résultat.

0,5 ②- a - Calculer : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$

0,75 b - Montrer que : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=1$ .

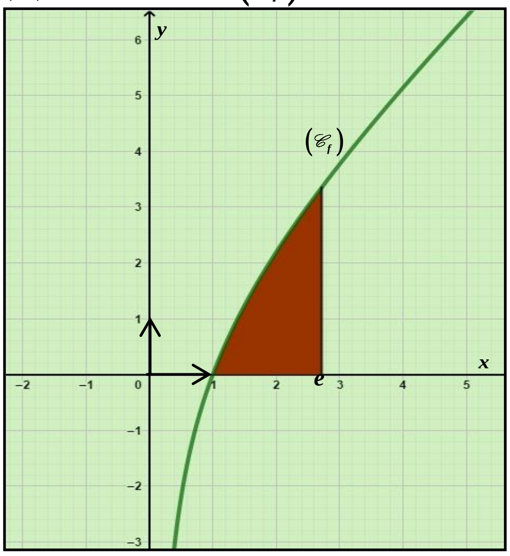
1 c - Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[f(x)-x\right]$ et donner une interprétation géométrique du résultat.

0,75 ③- a - Montrer que : $\forall x\succ 0$ , $f'(x)=1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

0,75 b - Calculer : $f(1)$ puis dresser le tableau de variations de $f$ .

0,5 c - En déduire le signe de $f$ sur $]0;1]$ et $[1;+\infty[$.

0,75 d - Déterminer l'équation de la tangente $(T)$ à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse 1.




④- Dans la figure ci-contre $(\mathscr{C}_f)$ est la courbe représentative de $f$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 a - En utilisant une intégration par parities, montrer que : $\int_1^e \ln(x)dx=1$.

1 b - Montrer que l'aire de la partie hachurée est égale à $\dfrac{1}{2}\left(e^2-1\right)u.a$

$(u.a$ signifie unité d'aire ).

**2$^{ème}$ partie :**

Soit $g$ la fonction numériquet du variable réelle $x$ définie sur $]0,+\infty[$ par :

$g(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)(x-1+2\ln x)$.

1 ① - Montrer que : $\forall x\succ 0$ , $g'(x)=f(x)$.

1 ②- En utilisant ③- c de la partie 1, montrer que $g$ est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

0,5 ③- a - Que représente la fonction $g$ pour la fonction $f$ ? ( justifier la réponse).

1 b - En déduire , sans calcul, la valeur de $g(e)-g(1)$. ( justifier la réponse)