Prof : Karimine | **Thème-1 : Etude de fonctions** | **Mathématiques-ECT2**

Les établissements scolaires seront fermés dès lundi 16 mars pour limiter la propagation du Coronavirus. Afin de maintenir un lien pédagogique avec mes élèves, j'ai mis place des solutions pour assurer une continuité pédagogique. Et vu que notre temps est précieux, je voulais simplement vous informer que je produirai 3 types de contenus. je vous partagerai un document PDF (cours ou révision) et un document de TP scilab et puis dans maximum 3 jours le corrigé sera publiée en vidéo sur ma chaîne Youtube intitulé Karimine ou sur mon site web www.karimine.me

Problème 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - 2 + 2x$

❶
- a Montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}$.
- b Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$
- c En déduire, pour tout réel x, le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

❷ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1 - \dfrac{x}{e^x}$
- a Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ et vers $+\infty$
- b Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{g(x)}{2e^x}$
- c En déduire le sens de variation de f.
- d Etudier la convexité de f.

❸ On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$
- a Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- b Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \geq 2^n$
- c En déduire que (u_n) diverge et préciser sa limite.
- d Ecrire un programme scilab qui, pour un réel M entré par l'utilisateur, calcule et affiche le rang du premier terme de la suite supérieur ou égal à M.

❹ On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$
- a Démontrer que la suite (S_n) new est croissante.
- b Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leqslant 2$
- c En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$

❺ Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$
- a Calculer I_0 , $I_0 + I_1$ puis en déduire I_1
- b Montrer que la suite $(I_n)_n$ est positive et décroissante. En déduire qu'elle converge.
- c Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$
- d Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $(-1)^n I_n = \ln 2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$
- e En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$