Problème 2

On dispose de trois urnes numérotées $\mathbf{1, 2}$ et $\mathbf{3}$, qui contiennent chacune deux boules.

- L'urne numéro 1 contient deux boules blanches.
- L'urne numéro 2 contient une boule blanche et une boule rouge.
- L'urne numéro 3 contient deux boules rouges.

L'expérience consiste à choisir une fois pour toutes une urne au hasard , puis à y effectuer une succession de tirages d'une boule avec remise, jusqu'a l'éventuelle apparition d'une boule blanche.
Pour tout entier k compris entre $\mathbf{1}$ et $\mathbf{3}$ on note U_k l'événement " On choisit l'urne numéro k ". Par suite on a : $P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$
On considère la variable aléatoire X égale au rang du tirage où apparaît pour la première fois une boule blanche. On attribue à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais de boule blanche.

❶ On considere deux nombres entiers naturels q et n tels que $n \geqslant q$.
En raisonnant par récurrence sur n, établir la formule suivante: $\sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$

❷ En faisant $q = 1, 2$ en déduire une expression des sommes : $\sum_{k=1}^{n} k \quad ; \quad \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k^2$

❸ a Déterminer $X(\Omega)$ puis donner $P_{U_1}(X=1), P_{U_2}(X=1)$ et $P_{U_3}(X=1)$

b En utilisant le théorème des probabilités totales, établir la relation: $P(X=1) = \frac{1}{2}$

❹ a Donner, pour tout entier j superieur ou égal à $\mathbf{2}$, : $P_{U_1}([X=j])$ et $P_{U_3}([X=j])$

b Calculer, pour tout entier j supérieur ou égal à $\mathbf{2}$, $P_{U_2}([X=j])$

c Montrer, pour tout entier j supérieur ou égal a $\mathbf{2}$, la relation : $P([X=j]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^j$

❺ Utiliser les résultats précedents pour calculer $P(X=0)$.

❻ Justifier l'existence de l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X. Calculer $E(X)$

❼ Justifier l'existence de l'esperance mathématique $E\left(X^2\right)$ de la variable aléatoire X. Calculer $V(X)$

Problème 3

Un commerçant receptionne un carton de quatres articles. Sur ces quatres articles, 2 d'entre eux sont défectueux. Le commerçant contrôle les articles du lot en les tirant au hasard les uns après les autres et sans remise. Soit X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier article défectueux contrôlé. Soit Y la variable aléatoire égale an rang d'apparition du second article défectueux contrôlé.

❶ Préciser l'ensemble des valeurs possibles pour X ainsi que l'ensemble des valeurs possible pour Y.

❷ Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

❸ Déterminer les lois des variables X et Y

❹ déterminer les valeurs des espérances et les variances de X et Y

❺ Calculer la covariance du couple (X, Y) puis En déduire le coéficient de corrélation de X et Y