Probabilités

Expérience aléatoire :

C'est une expérience qui a plusieurs issues possibles et l'on ne peut pas prévoir avec certitude quel sera le résultat. Elle est liée au hasard.

Exemples :

- Lancer d'un dé dont les faces sont numérotées de 1 à **6.**
- Lancer d'une pièce de monnaie.

Possibilité-événement

❶ Tout résultat de l'expérience aléatoire est appelé une possibilité ou issueou éventualité

❷ Univers Ω : C'est l'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire.on note :

$$\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

❸ Evénement: C'est une partie de l'univers Ω .

❹ Evénement élémentaire lorsque la partie associée est réduite à un élément (on parle de singleton);

❺ Evénement certain s'il est toujours réalise (c'est alors Ω)

❻ Evénement impossible s'il n'est jamais réalisé (c'est alors $\varnothing$) .

Exemples :

a On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6

- L'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- L'évènement A :"obtenir un nombre est pair" est modélisé par : $A = \{2, 4, 6\}$
- L'évènement B : "le nombre obtenu est un nombre premier" est modélisé par : $B = \{2, 3, 5\}$
- L'évènement C : "le nombre obtenu est inférieur à 10" est modélisé par : $B = \Omega$
- L'évènement D : "le nombre obtenu est 7" est modélisé par : $B = \varnothing$

b Lancer d'une pièce de monnaie.

- L'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- L'évènement A :"obtenir Pile" est modélisé par : $A = \{P\}$ (événement élémentaire)

Opérations sur les événements.

Soient A et B deux événements associés à une même expérience aléatoire

❶ L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$, est réalisé lorsque A ne l'est pas.

❷ L'événement intersection de A et B, noté $A \cap B$, est réalisé lorsque Aet B le sont.

❸ Lorsque $A \cap B = \varnothing$ les événements A et B sont dits incompatibles.

❹ L'événement union de A et B, noté $A \cup B$, est réalisé lorsque A ou B le sont

Exemples :On reprend l'exemple précédent on a :$\overline{A} = \{1, 3, 5\}$ $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ et $A \cap B = \{2\}$

PROBABILITÉ

Notion de probabilité :

Ω désigne un univers de n éventualités $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ Définir une probabilité p sur Ω, c'est associer, à chaque évenement élémentaire e_i un nombre réel $p(w_i) = p_i$ de l'intervalle $[0;1]$, tel que: $\boxed{p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1}$

Exercice 1

On lance un dé . Calculer la probabilité des événements élémentaires dans les cas suivants

❶ Le dé est truqué tel que le **6** à deux fois plus de chance de sortir que toutes les autres faces (qui sont elles équiprobables).

❷ Le dé est équilibré

Définition :

Lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisées, on dit qu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.
Remarque : Voici des exemples d'énoncés indiquant qu'il y a équiprobabilité :

Remarque: Voici des exemples d'énoncés indiquant qu'il y a équiprobabilité :

- On choisit au hasard sous-entend que tous les choix sont équiprobables.
- On lance un dé (ou une pièce) non truqué(e) (ou bien équilibré(e)) signifie que chacune des faces possède la même probabilité d'apparaître.
- Une urne contient des boules indiscernables au toucher signifie que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

Probabilité d'un évènement :

Soit Ω un univers fini sur lequel est définie une loi de probabilité. La probabilité d'un évènement A , est le réel noté $p(A)$ tel que:

- $p(A) \in [0;1]$
- $p(A)$ est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le constituent.

Exercice 2

On reprend l'exercice précédent
Calculer la probabilité de l'événement A :"obtenir 5 ou 6" dans chacun des cas précédents

Équiprobabilité :

Soit Ω un univers fini de n éventualités. s. Si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité c'est à dire, si $p(w_1) = p(w_2) = \cdots = p(w_n) = \frac{1}{n}$, alors l'univers est dit équiprobable.

On a alors pour tout évènement A, $\boxed{p(A) = \frac{\text{nombre des issues favorables à } A}{\text{nombre des issues possibles}} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}}$

Exercice 3

Une urne contient six boules indiscernables au toucher. Quatre sont blanches, une et rouge et la dernière est noire. On tire une boule au hasard.
Quelle est la probabilité que cette boule soit blanche ?

Formules de probabilités

Propriétés :

Soit $\boldsymbol{\Omega}$ un univers fini sur lequel est définie une loi de probabilité.

- On a $\boxed{p(\Omega)=1 \ et \ p(\varnothing)=0}$
- Pour tout évènement A, $\boxed{p(\overline{A})=1-p(A)}$
- Si A et B sont deux évenements $\boxed{p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)}$
- Si A et B sont deux évenements incompatibles alors $\boxed{p(A\cup B)=p(A)+p(B)}$

Exercice 4

Un sac contient quatre boules blanches numérotées $\mathbf{1,1,1,2}$ et trois boules noires numérotees $\mathbf{1,2,2}$ indiscernables au toucher. On considère l'expérience suivante: On tire au hasard simultanément trois boules du sac.

❶ Quel est le nombre des issues possibles?

❷ Calculer la probabilité de l'evénement A "tirer trois boules de même couleur"

❸ Calculer la probabilité de l'événement B "tirer trois boules portant le même numéro"

❹ Calculerla probabilité de l'événement C "tirer exactement deux boules blanches".

❺ Calculer la probabilité de l'événement D "tirer au moins une boule blanche".

❻ Calculer $p(A\cup B)$

Probabilité Conditionnelle

Définition :

Soit $\boldsymbol{\Omega}$ l'univers d'une expérience aléatoire muni d'une probabilité p.
Soient A et B deux événements de $\boldsymbol{\Omega}$ tel que $p(A)\neq 0$
La probabilité de B sachant que A est réalisé, est le réel noté $p_A(B)$ ou $p(B/A)$ définie par :

$$\boxed{p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}}$$

Exercice 5

Une urne contient quatre boules blanches numérotées $\mathbf{1,1,1,2}$ et deux boules vertes numérotées $\mathbf{1,1}$
On tire au hasard simultanément deux boules (les boules sont indiscernables au toucher). On considère les ceux événements:
A : "Tirer deux boules de même couleur". B : "Tirer deux boules portant le même numéro".

❶ Calculer la probabilité de tirer deux boules de la même couleur sachant qu'elles portent le même numéro.

❷ Calculer la probabilité de tirer deux boules portant le même numéro sachant qu'elles sont de même couleur.

Propriété :

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire muni d'une probabilité p.

Si A et B sont deux événements de Ω tels que $p(A) \neq 0$ alors $\boxed{p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)}$

Exercice 6

Une urne contient une boule rouge et deux boules vertes. On tire une première boule, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule de la même couleur et on tire une seconde boule de l'urne. On désigne par:
R : " Tirer une boule rouge au premier tirage "
V : " Tirer une boule verte au premier tirage "
A : " Tirer une boule rouge au deuxième tirage "

❶ Calculer $p(R), p(V), p_R(A)$ et $p_V(A)$

❷ En déduire $p(A \cap R), p(A \cap V)$ puis $p(A)$

❸ Calculer $p_A(R)$

Définition :

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire muni d'une probabilité p.
Soient A et B deux événements de Ω
A et B sont indépendants si et seulement si $\boxed{p(A \cap B) = p(A) \times p(B)}$

Exercice 7

Une urne contient trois boules rouges numérotées $2 - 2 - 3$ et deux boules blanches numérotées $1 - 3$(les boules sont indiscernables au toucher)
On tire au hasard simultanément deux boules . On considère les ceux événements:

- A : "Tirer deux boules de couleur différentes".
- B : "Tirer deux boules portant deux numéros dont la somme égale à 4".
  Etudier l'indépendance de A et B

Epreuves répétées

Répétition d'épreuves identiques et indépendantes :

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et A un un événement de probabilité p.
On répète cette épreuve n fois de suite de façon identique et indépendantes . et on note:
A_k :"L'événement A est réalisé k fois exactement" on a :

$$\boxed{p\left(A_k\right) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{pour tout} \quad k \in \{0; 1; 2; \ldots; n\}}$$

Exercice 8

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules blanches.Les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne; on répète cette épreuve 5 fois de suite. (Tirage successif et avec remise de 9 boules)

❶ Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge deux fois exactement.

❷ Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge au moins une fois.

Variables aléatoires

Définitions :

Soit $\boldsymbol{\Omega}$ l'univers d'une expérience aléatoire.

❶ On appelle variable aléatoire, toute fonction $\boldsymbol{X}$ de $\boldsymbol{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$, qui à tou élément de $\boldsymbol{\Omega}$ (éventualité) associe un réel. L'ensemble des valeurs prise par $\boldsymbol{X}$ est noté $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\Omega})$.

❷ L'événement $(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{a})$ est l'ensemble des issues de $\boldsymbol{\Omega}$ auxquelles on associe le réel $\boldsymbol{a}$.

❸ Lévénement $(\boldsymbol{X}>\boldsymbol{a})$ est l'ensemble des issues de $\boldsymbol{\Omega}$ auxquelles on associe un réel strictement supérieur à $\boldsymbol{a}$.

Exemple : Un joueur lance trois fois une pièce et soit la variable aléatoire égale au nombre de pile obtenu.

- $\boldsymbol{X}$ est une variable aléatoire et $\mathbf{X}(\boldsymbol{\Omega}) = \{\ldots;\ldots;\ldots.;\ldots.\}$
- $(\boldsymbol{X}=0) = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
- $(\boldsymbol{X}\leq 2) == \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

Loi probabilité d'une variable aléatoire:

Soit $\boldsymbol{\Omega}$ l'univers d'une expérience aléatoire et $\boldsymbol{X}$ une variable aléatoire
On appelle loi de la variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ la donnée des $\mathrm{P}(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{k})$ pour tout réel $\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\Omega})$

Exemple : On reprend l'exemple précédent

- La loi de la variable aléatoire X est donnée par:
- Calculons $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}\leq 2)$

Esperance mathématique, variance et écart-type:

Définitions :

Soit $\boldsymbol{X}$ une variable aléatoire définie sur $\boldsymbol{\Omega}$, qui prend les valeurs $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_k}$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
$\mathbb{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

❶ On appelle espérance mathématique de $\boldsymbol{X}$, le réel noté $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})$ défini par:

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{x_i p}\left(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x_i}\right) = \boldsymbol{x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_kp_k}$$

❷ On appelle variance de $\boldsymbol{X}$ le réel, notée $\mathbf{V(X)}$, et définie par: $\boxed{\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathbb{E}\left(\mathrm{X}^2\right) - \mathbb{E}(\mathrm{X})^2}$

où $\boxed{\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}^2\right) = \boldsymbol{x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \ldots + x_n^2p_n}}$

❸ On appelle écart-type de $\boldsymbol{X}$, et on note $\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{x})$ le réel: $\boxed{\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})}}$

Exemple :
On reprend l'exemple précédent donner loi de la variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ puis calculer $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})$ et $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X})$

Loi Binomiales

Définition :

Soit $\boldsymbol{\Omega}$ l'univers d'une expérience aléatoire et $\boldsymbol{A}$ un un événement de probabilité $\boldsymbol{p}$.
On répète $\boldsymbol{n}$ fois cette expérience dans les mêmes conditions de manière indépendante.
On associe à cette expérience la variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ qui compte le nombre total de réalisation de l'événement $\boldsymbol{A}$.
La loi de probabilité de $\boldsymbol{X}$ est appelée loi binomiale de paramètres $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{p}$. On la note $\boldsymbol{B(n;p)}$

Exemple : On reprend l'exemple précédent donner loi de la variable aléatoire $\boldsymbol{X}$

Définitions :

Si $\boldsymbol{X}$ suit la loi binomiale de paramètres $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{p}$, on a :

❶
- $\boxed{X(\Omega) = \{0;1;2;\ldots;n\}}$
- $\boxed{p(X=k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \text{ pour tout entier } \mathbf{k} \text{ de } X(\Omega)}$

❷ L'espérance mathématique de $\boldsymbol{X}$ est: $\boxed{E(X) = np}$

❸ La variance de $\boldsymbol{X}$ est $\boxed{V(X) = np(1-p)}$

❹ Lécart-type de $\boldsymbol{X}$ est $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}}$

Exemple : Calculer $\boldsymbol{E(X)}$ et $\boldsymbol{V(X)}$

Exercice 9

Un sac contient: 5 boules blanches portant les numéros: $\mathbf{0;0;1;1;2}$. 3 boules rouges portant les numéros: $\mathbf{0;1;3}$. les boules sont indiscernables au toucher.On tire successivent avec remise 3 boules

❶ Soit $\boldsymbol{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules blanches parmi les 3 boules tirées.

a) Déterminer les valeurs prises par $\boldsymbol{X}$ puis déterminer la loi de probabilité de $\boldsymbol{X}$.

b) Calculer $\boldsymbol{E(X), V(X)}$ et $\boldsymbol{\sigma(X)}$

c) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche.

❷ Soit $\boldsymbol{Y}$ la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le produit des nombres portés par le 3 boules tirées.

a) Montrer que: $\boldsymbol{Y(\Omega) = \{0;1;2;3;6\}}$

b) Déterminer la loi de probabilité de $\boldsymbol{Y}$.

c) Calculer $\boldsymbol{E(X), V(X)}$ et $\boldsymbol{\sigma(X)}$

d) Calculer la probabilité de chacun des evenements suivants.

e)
- $\boldsymbol{A}$: "Obtenir un produit supérieur ou égal à 2"
- $\boldsymbol{B}$: "Obtenir un produit inférieur à 3 ".