Révision --23/04/2020

On dispose de deux urnes :

- Une urne $\mathcal{F}$ dans laquelle sont disposées deux boules rouges et deux boules noires.
- Une urne $\mathcal{P}$ dans laquelle sont disposées quatre boules rouges.

Il est supposé que toutes ces boules sont indiscernables au toucher. On commence par lancer une pièce non truquée. Si l'on obtient "FACE", on choisit de faire une succession de tirages dans l'urne $\mathcal{F}$. Dans le cas contraire, on choisit de faire les tirages dans l'urne $\mathcal{P}$. On note l'événement

$$F : \text{« la pièce amène "FACE" »}.$$

On définit également :

$$\forall k \geqslant 1, \quad R_k : \text{« le } k^{ème} \text{ tirage dans l'urne choisie amène une boule rouge »}.$$

Les différentes parties sont indépendantes.

I. Un seul tirage Dans cette partie, on suppose que l'on effectue un seul tirage d'une boule dans l'urne choisie par la pièce. On désigne alors U la variable aléatoire qui égale à 1 si l'on tire une boule rouge et -1 sinon.

1. Justifier à l'aide de la formule des probabilités totales que $\mathsf{P}(U = 1) = \dfrac{3}{4}$.

2. En déduire la loi de U.

3. Calculer l'espérance et la variance de U, respectivement notées $\mathsf{E}(U)$ et $\mathsf{V}(U)$.

4. On pose $V = \dfrac{U+1}{2}$. Montrer que V suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

5. En exprimant U par rapport à V, retrouver d'une autre manière les valeurs de $\mathsf{E}(U)$ et $\mathsf{V}(V)$ calculées à la question **3.**.

II. Deux tirages Dans cette partie, on suppose que l'on effectue deux tirages successifs sans remise (c'est-à-dire que la boule tirée lors du premier tirage n'est pas remise dans l'urne avant de procéder au second tirage).

On désigne par X le nombre de boules rouges ainsi tirées et par F_X sa fonction de répartition.

1. Quelles sont les valeurs prises par la variable X ?

2. Calculer $\mathsf{P}_F(R_1 \cap R_2)$ et $\mathsf{P}_{\overline{F}}(R_1 \cap R_2)$. En déduire que $\mathsf{P}(X = 2) = \dfrac{7}{12}$.

3. Justifier que $[X = 0] \cap \overline{F} = \varnothing$. En déduire que $\mathsf{P}(X = 0) = \dfrac{1}{12}$.

4. Déterminer la loi de X.

5. Calculer pour tout réel x, la valeur explicite de $F_X(x)$.

6. On remarque a posteriori que les deux boules tirées sont rouges. Quelle est la probabilité que la pièce ait amené "PILE" ?

III. Plusieurs tirages On lance la pièce, on choisit l'urne puis on décide de faire des tirages sans remise dans l'urne choisie jusqu'à ce que l'on soit en mesure de déterminer avec certitude dans quelle urne l'on se trouve.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![1\,;\,3]\!]$.

2. Expliquer pourquoi $[Y = 1] = \overline{F} \cap R_1$. En déduire $\mathsf{P}(Y = 1)$.

3. Calculer de même $\mathsf{P}(Y = 2)$.

4. En déduire que $\mathsf{P}(Y = 3) = \dfrac{7}{12}$.

5. Calculer $\mathsf{E}(Y)$.

IV. Une nouvelle règle Dans cette partie, on ne considère qu'une seule urne contenant 9 boules rouges et une seule boule noire. On effectue plusieurs tirages sans remise d'une boule de l'urne et on s'arrête dès que l'on tire la boule noir. On désigne alors par T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

On définit comme dans les parties précédentes l'événement :

$$\forall k \geqslant 1, \quad R_k : \text{« le } k^{\text{ème}} \text{ tirage dans l'urne choisie amène une boule rouge ».}$$

1. Donner l'ensemble $T(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable T.

2. Justifier que pour tout $i \in [\![2\,;\,9]\!]$, $\mathsf{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{i-1}}(R_i) = \dfrac{10-i}{11-i}$.

3. Utilisez la formule des probabilités composées pour en déduire la valeur de $\mathsf{P}(T = k)$, pour tout k de $T(\Omega)$.

4. Reconnaître la loi de T. Donner son espérance et sa variance.