Barème

Exercice 1 : (4,5 points)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 9}{u_n - 5} \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

0,5 ① – Calculer u_1 et u_2.

0,75 ② – Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n \prec 3$.

0,5 ③ – a – Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n-3)^2}{5-u_n}$.

0,5 b – Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

0,25 ④ – En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

⑤ – On pose : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $v_n = \dfrac{-2u_n+4}{u_n - 3}$.

0,25 a – Vérifier que $v_0 = -1$.

0,5 b – Montrer que $v_{n+1} = \dfrac{-u_n+1}{u_n-3}$.

0,5 c – En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 1.

0,25 ⑥ – a – Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n = \dfrac{3v_n+4}{v_n+2}$.

0,25 b – En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$.

0,25 c – Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2 : (4 points)

Un sac S_1 contient deux boules blanches, une boule rouge et trois boules vertes.
Un sac S_2 contient deux boules blanches, deux boules rouges et une boule verte.
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On considère l'expérience suivante : « On tire une boule du sac S_1 puis on tire une boule du sac S_2 » . On considère les événements suivants :

A « Les deux boules tirées sont blanches »

B « Les deux boules tirées sont de couleurs différentes » .

1,5 ① – Montrer que : $p(A) = \dfrac{1}{12}$.

1,5 ② – Montrer que : $p(\overline{B}) = \dfrac{7}{24}$, ($\overline{B}$ est l'événement contraire de B) et en déduire $p(B)$.

③ – Calculer $p(A \cup B)$.

Problème : (11,5 points)

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=(1-\ln x)\ln x$.

Et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,75 ① – Calculer $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x\succ 0}} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

0,5 ② – a – Calculer : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$.

1 b – On admet que : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$. Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

1 ③ – a – Montrer que : $f'(x)=\dfrac{1}{x}(1-2\ln x)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

1,25 b – Montrer que f est croissante sur $]0;\sqrt{e}]$ et qu'elle est décroissante sur $[\sqrt{e};+\infty[$.

0,5 c – Calculer $f(\sqrt{e})$ puis dresser le tableau de variation de f.

1,5 d – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$ et en déduire les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.

1 e – Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse $x_0=1$.

0,75 ④ – a – Montrer que $f''(x)=\dfrac{1}{x^2}(2\ln x-3)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

1 b – Montrer $A\left(e^{\frac{3}{2}};\dfrac{-3}{4}\right)$ est un point d'inflexion de $(\mathscr{C}_f)$.

⑤ – On considère la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par: $F(x)=x\left[-(\ln x)^2+3\ln x-3\right]$

0,5 a – Montrer que F est une fonction primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

0,75 b – A partir de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-dessous, donner les variations de F sur $]0;+\infty[$.

1 c – Calculer l'aire de la partie hachurée.