Barème

Exercice 1 : (4,5 points)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 1 \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

0,5 ① - *Calculer* u_1 *et* u_2.

0,5 ② - *Montrer que* : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n \prec \frac{5}{4}$.

0,5 ③ - a - *Montrer que* : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{5}\left(u_n - \frac{5}{4}\right)$.

0,75 b - *Déduire que* (u_n) *est une suite croissante et convergente.*

④ - *On pose* : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $v_n = u_n - \frac{5}{4}$.

0,25 a - *Calculer* v_0.

0,5 b - *Montrer que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique de raison* $\frac{1}{5}$.

c - *calculer* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en fonction de n.*

1 *puis déduire que* : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n = \frac{1}{4}\left(5 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$

0,5 d - *Calculer* $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Problème : (11 points)

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=x+\dfrac{2}{x}+\ln x$.

Et $(\mathscr{C}_f)$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,75 ① - *a - Montrer que :* $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=+\infty$.

1,5 *b - Montrer que :* $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ *et* $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left(f(x)-x\right)=+\infty$ *et interpréter le résultat obtenu.*

0,5 ② - *a - Vérifier que :* $(\forall x\in]0;+\infty[):\ f(x)=x+\dfrac{2+x\ln x}{x}$ *pour tout* $x\in D_f$.

1 *b - Calculer* $\lim\limits_{x\mapsto0^+} f(x)$ *et interpréter le résultat obtenu.*

0,5 ③ - *a - Calculer* $f'(x)$ *pour tout* $x\in]0;+\infty[$.

1 *b - Vérifier que :* $(\forall x\in]0;+\infty[):\ f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x^2}$ *,puis etudier le signe de* $(x-1)(x+2)$ *sur les intervalles* $[1;+\infty[$ *et* $]0;1]$.

0,5 *c - En déduire que f est croissante sur l'intervalle* $[1;+\infty[$ *et décroissante sur l'intervalle* $]0;1]$.

0,5 *d - Dresser le tableau de variations de f.*

0,75 ④ - *a - Vérifier que :* $(\forall x\in]0;+\infty[):\ f''(x)=\dfrac{4-x}{x^3}$.

1,5 *b - Etudier le signe de* $f''(x)$ *pour tout* $x\in]0;+\infty[$*, puis déduire la courbe* $(\mathscr{C}_f)$ *admet un points d'inflexion à determiner .*

⑤ - *a - Montrer en utilisant une integration*

1 *par partie que :* $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx=1$

1,5 *b - Déduire la surface de la partie achuré . (voir figure)*