Barème

Exercice 1 : (4,5 points)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{5}u_n + 1 \end{cases}$; $(\forall n\in\mathbb{N})$

0,5 ① - *Calculer* u_1 *et* u_2 .

0,5 ② - *Montrer que :* $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n \prec \dfrac{5}{3}$.

0,5 ③ - *a - Montrer que :* $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{3}{5}\left(u_n - \dfrac{5}{3}\right)$.

0,75 *b - Déduire que* (u_n) *est une suite croissante et convergente.*

④ - *On pose :* $(\forall n\in\mathbb{N})$: $v_n = u_n - \dfrac{5}{3}$.

0,25 *a - Calculer* v_0 .

0,5 *b - Montrer que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique de raison* $\dfrac{2}{5}$.

c - calculer $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en fonction de n.*

1 *puis déduire que :* $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n = -\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + \dfrac{5}{3}$

0,5 *d - Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2 : (4,5 points)

Un sac contient 3 boules rouges, 2 boules vertes et 2 boules blanches . On tire deux boules du sac simultanément.

① - *On considère les événements suivants :*

A « Obtenir deux boules de même couleurs »

B « Obtenir une boule rouge ou moins »

1 *a - Montrer que :* $p(A) = \dfrac{5}{21}$.

1 *b - Calculer* $p(B)$.

1 *c - Montrer que :* $p(A\cap B) = \dfrac{1}{7}$.

0,5 *d - A et B sont-ils indépendants.*

② - *Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe au nombre de boules rouges tirées.*

a – Remplir le tabeau suivant :

0,75

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$			

0,25 b – Calculer l'espérance mathématique : $E(X)$.

Problème : (11 points)

☺ 1ère partie :

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=1-\frac{1}{x^2}+\ln x$.

0,5 ① - a – Montrer que : $\lim_{x\mapsto 0^+} g(x)=-\infty$.

0,5 b – Calculer : $\lim_{x\mapsto +\infty} g(x)$.

0,5 ② - a – Montrer que : $g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}$ pour tout $x\in]0,+\infty[$.

0,5 b – Etudier le signe de $g'(x)$ sur $]0,+\infty[$.

0,75 c – Calculer $g(1)$ puis Dresser le tableau de variations de g.

1 d – En déduire que $\forall x\in]0,1]$: $g(x)\leq 0$ et $\forall x\in[1,+\infty[$: $g(x)\geq 0$.

☺ 2ème partie :

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x}+x\ln x$.

Et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 ① - a – Montrer que : $\lim_{x\mapsto 0^+} f(x)=+\infty$ et interpréter le résultat obtenu.

1,75 b – Calculer : $\lim_{x\mapsto +\infty} f(x)$ et $\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat obtenu.

1 ② - a – Montrer que : $f'(x)=g(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$.

1 b – Calculer $f(1)$ et Dresser le tableau de variations de f.

1 ③ - Montrer que la fonction définie par : $F(x)=-\frac{x^2}{4}+\left(\frac{x^2}{2}+1\right)\ln x$ est une fonction primitive de la fonction de f sur $]0,+\infty[$.

④ - La courbe représenté si dessus est la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et (Δ) est la droite d'équation $y=\frac{x}{2}$.

Calculer la surface de la partie achuré .

1,5