Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite numérique définie par: $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 9}{u_n - 2}$ pour tout n de IN

❶ Calculer u_1 et u_2

❷ a Montrer par récurrence que pour tout n de IN : $u_n > 3$

b Montrer que: pour tout n de IN $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n-3)^2}{u_n - 2}$

c En déduire que: $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante.

❸ Montre que: la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

❹ On pose pour tout n de IN :$v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$

a Calculer v_0

b Calculer $v_{n+1} - v_n$ et en déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est arithmétique de raison 1

c Montre que: $v_n = \dfrac{1}{2} + n$; pour tout n de IN

❺ Vérifier que: pour tout n de IN: $u_n = \dfrac{3v_n + 1}{v_n}$

❻ En déduire que: pour tout n de IN: $u_n = \dfrac{6n+5}{2n+1}$

❼ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 2

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par:

$$g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$$

Partie A

❶ Montrer que $g'(x) = 2\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

❷ Etudier le signe de $g'(x)$ sur $]\,0;+\infty[$

❸ Calculer $g(1)$ et dresser le tableau de variations de g (Le calcul des limites n'est pas demandé)

❹ Déduire du tableau de variations que $g(x) > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur $]o;+\infty[$: $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1 + \dfrac{\ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

❶ Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique du résultat.

❷ a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \left(\dfrac{x}{2} + 1 \right) \right)$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.

❸ a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$

b) Vérifier que: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$ pour tout x de $]0; +\infty[$

c) En déduire que: f est croissante sur $]0; +\infty[$

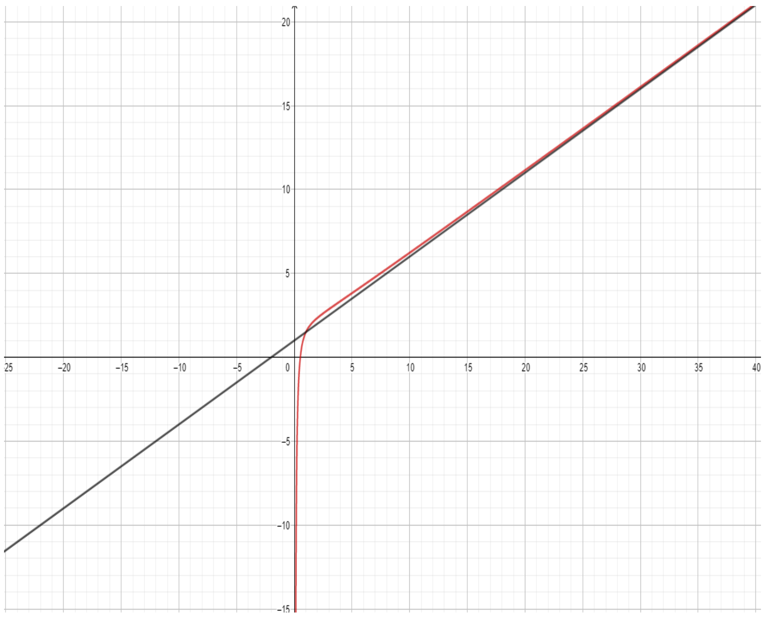
❹ Soit (D) la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2} + 1$

a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (D) et de la courbe (C)

b) Etudier le signe de $\left(f(x) - \left(\dfrac{x}{2} + 1 \right) \right)$ sur $]0; +\infty[$ et en déduire la position relative de (C) par rapport à (D)

❺ Calculer $f(1)$ et $f'(1)$ et donner l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$

❻ Dans la figure ci-dessous (C) est la courbe représentative de f et (D) la droite déquation $y = \dfrac{x}{2} + 1$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$



Soit a l'abscisse du point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses $(O; \vec{i})$ Donner à partir de la courbe (C) le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 3

On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par: $h(x) = \left(x^2 + 1\right) e^x - 1$

❶ Montrer que $h'(x) = (x+1)^2 e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$

❷ Donner le signe de $h'(x)$ sur $\mathbb{R}$

❸ Calculer $h(0)$ puis dresser le tableau de variations de h (Le calcul des limites n'est pas demandé)

❹ Etudier à partir du tableau de variations le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 4

Déterminer une primitive de chacune des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 telles que:

❶ $f_1(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$

❷ $f_2(x) = 3x^2\left(x^3+1\right)^2$ définie sur $\mathbb{R}$

❸ $f_3(x) = 2x - \dfrac{2}{x^3}$ définie sur $]0;+\infty[$

❹ $f_4(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$ $0;+\infty[$